

2006年度冬学期数学IB期末試験問題

担当：斉藤義久

[1] 次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int \sqrt{2x+1} dx \quad (2) \int x^2 \log x dx \quad (3) \int \frac{1}{x^4+1} dx$$

[2] 極座標表示で $r = a \cos \theta$ ($-\pi/2 < \theta < \pi/2$) と表される曲線の長さを求めよ。ただし a は正の定数とする。

[3] 次の積分の値を求めよ。

$$\int_D (a^2 - x^2 - y^2) dx dy \quad (a > 0).$$

ただし、 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$ 。

[4] 次のべき級数の収束半径を求めよ。

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) x^n \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!} x^n$$

[5] 次の等式を示せ。

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2.$$

[6] 収束半径が r であるべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と、 $I = (-r, r)$ を定義域とする関数 $f(x)$ が与えられているとする。このとき、 I 上で

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

が成り立つならば、 $a_n = f^{(n)}(0)/n!$ であることを示せ。

注) $f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の n 階導関数、 $f^{(n)}(0)$ は $f^{(n)}(x)$ に $x = 0$ を代入した値。

(答案作成上の注意)

- [1] から順番に説く必要はなく、出来た問題から答案を作成してよい。
- 答案のみ提出し、計算用紙は各自持ち帰ること。
- 裏面を使用する場合は「裏へ続く」、答案が2枚以上になる場合は「2枚目へ続く」等、何らかの説明を答案に明記すること。また答案が複数枚に及ぶ場合は、全ての答案に名前と学生番号を書くこと。
- 何の説明もなく答えのみしか書いていない答案は0点にする場合があるので注意すること。
- 判読不能の文字、文章として日本語の体裁をなしていない答案は、仮に好意的に解釈すれば正解と言えなくもない場合でも0点にする場合があるので注意すること。特に計算を書きなぐっただけの答案は単なるメモ用紙であって、答案とは認めない。