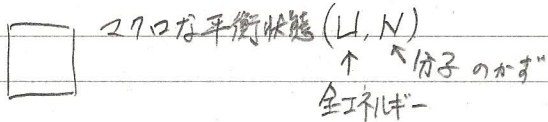


§ ボルツマンエントロピー



熱力学エントロピー - $S(U, N)$ は?

- 示量性 $S(\lambda U, \lambda N) = \lambda S(U, N)$
- 変分原理 $S(U, N) = S(\frac{U}{2}, \frac{N}{2}) + S(\frac{U}{2}, \frac{N}{2})$
 $\geq S(U', \frac{N}{2}) + S(\tilde{U}', \frac{N}{2})$
 for $\forall U', \tilde{U}'$,
 s.t. $U' + \tilde{U}' = U$

実は既に知られてる?

$$\Omega(U, N) = \binom{M}{M}$$

たとえ $U = E_1 + M\Delta E$. $M = \frac{U - E_1}{\Delta E}$

$$\log \Omega(U, N) \approx N\sigma(p) = N\sigma\left(\frac{U - E_1}{\Delta EN}\right)$$

示量性

$$\log \Omega(\lambda U, \lambda N)$$

$$= \log \binom{\lambda N}{\lambda M} \approx \lambda N \cdot \sigma\left(\frac{\lambda M}{\lambda N}\right)$$

$$= \lambda N \sigma(p) = \lambda \log \Omega(U, N)$$

変分原理

$$\log \binom{N}{M} + \log \binom{N}{M}$$

$$\approx \frac{N}{2} \left[\sigma\left(\frac{2M}{N}\right) + \sigma\left(\frac{2M}{N}\right) \right]$$

$$\leq N\sigma\left(\frac{M}{N}\right) \approx \log \binom{N}{M}$$

凸性

$$\log \Omega(U', \frac{N}{2}) + \log \Omega(\tilde{U}', \frac{N}{2}) \leq \log \Omega(U, N)$$

たとえ $U' + \tilde{U}' = U$

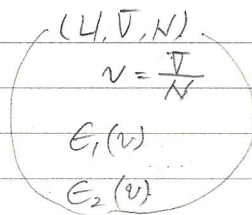
以上は正しい? $N \gg 1$ のとき

よって

$$S(U, N) = \alpha \log \Omega(U, N)$$

α は普遍定数.

正しい.



単位エネルギー
エントロピー

α を決めるには、定数 k_B を用いて U と T の関係を出す.

$$S(U, N) = \alpha \log \binom{M}{M}$$

$$= \alpha N \sigma\left(\frac{M}{N}\right)$$

$$= \alpha N \sigma\left(\frac{U - E_1}{N\Delta E}\right)$$

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S(U, N)}{\partial U} = \frac{\alpha}{\Delta E} \sigma'\left(\frac{U - E_1}{N\Delta E}\right)$$

$$\sigma'(p) = \frac{\log \frac{1-p}{p}}{2} = \frac{\alpha}{\Delta E} \log \left\{ \frac{N\Delta E}{U - E_1} \left[1 - \frac{U - E_1}{N\Delta E} \right] \right\}$$

$E_2 - E_1$

$$\frac{E_2 - E_1 - U + E_1}{N\Delta E}$$

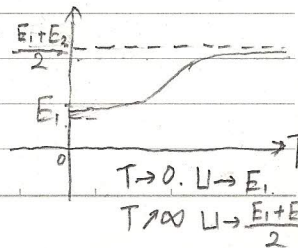
$$= \frac{\alpha}{\Delta E} \log \left\{ \frac{E_2 - U}{U - E_1} \right\}$$

逆らう?

$$\frac{E_2 - U}{U - E_1} = e^{\frac{\alpha \Delta E}{2T}} \rightarrow \otimes$$

$$U = \frac{E_1 e^{\frac{\alpha \Delta E}{2T}} + E_2 \frac{E_1 + E_2}{2}}{e^{\frac{\alpha \Delta E}{2T}} + 1}$$

T の関数としてのエネルギー



$T \rightarrow 0$ $U \rightarrow E_1$

$T \rightarrow \infty$ $U \rightarrow \frac{E_1 + E_2}{2}$