$U<U'$
$(U,X) \xrightarrow{a} (U',X)$ 可能
$(U',X) \xrightarrow{a} (U,X)$ 不可能.
← 仮定
$S(\alpha_0)=S_0$　$S(\alpha_1)=S_1$
$\alpha_0 \xrightarrow{a} \alpha_1$ 可能
$\alpha_1 \xrightarrow{a} \alpha_0$ 不可能

※が可能なλの最大値が存在. $\bar\lambda \in [0,1]$
$((1-\bar\lambda)\alpha_0, \bar\lambda\alpha_0) \xrightarrow{a} \alpha$ はぎりぎり可能.
よってこれは aq である.
$((1-\bar\lambda)\alpha_0, \bar\lambda\alpha_1) \xleftrightarrow{aq} \alpha$

よって $S(\alpha)=S((1-\bar\lambda)\alpha_0, \bar\lambda\alpha_1)$
$=(1-\bar\lambda)S(\alpha_0)+\bar\lambda\alpha_1$
$=(1-\bar\lambda)S_0+\lambda S_1$

あるいは
$$\boxed{S(\alpha)=\max\{(1-\lambda)S_0+\lambda S_1 \mid ((1-\lambda)S_0, \lambda S_1) \xrightarrow{a} \alpha \text{ が可能}\}}$$

Lieb-Yngrason 1999

$((1-\lambda)\alpha_0, \lambda\alpha_1) \xrightarrow{a} \alpha$ か可能か?
λ' について可能なら. 任意の $\lambda \le \lambda'$ について可能.
$((1-\lambda)\alpha_0, \lambda\alpha_1) \xrightarrow[a]{\text{かべをいれる}} ((1-\lambda')\alpha_0, (\lambda'-\lambda)\alpha_0, \lambda\alpha_1)$
$\xrightarrow[a]{} ((1-\lambda')\alpha_0, (\lambda'-\lambda)\alpha_1, \lambda\alpha_1)$
$\xrightarrow[a]{\text{かべをぬく}} ((1-\lambda')\alpha_0, \lambda'\alpha_1)$
$((1-\lambda)\alpha_0, \lambda\alpha_1) \xrightarrow[a]{} \alpha$ が可能な最大のλがある. → $\bar\lambda$
$((1-\bar\lambda)\alpha_0, \bar\lambda\alpha_1) \xleftrightarrow{aq} \alpha$ とできると仮定
$S(\alpha)=(1-\bar\lambda)S_0+\bar\lambda S_1$
$$\boxed{S(\alpha)=\max\{(1-\lambda)S_0+\lambda S_1 \mid ((1-\lambda)\alpha_0, \lambda\alpha_1) \rightarrow \alpha \text{ が可能}\} \quad \lambda \in [0,1]}$$

Lieb-Yangrason 1999
公理的熱力学
「熱」を使わずにエントロピーを1行で書いた!
例はあとで

Uについての単調増加性
$U<U' \Longleftrightarrow S(U,X)<S(U',X)$ 同じ
(ただし. $\alpha_0 \xrightarrow[a]{} (U,X) \xrightarrow[a]{} (U',X) \xrightarrow[a]{} \alpha_1$ のとき)
証明
$S(U,X)=(1-\bar\lambda)S_0+\bar\lambda S_1$
$S(U',X)=(1-\bar\lambda')S_0+\bar\lambda' S_1$ と書けている.
$\Rightarrow$ $((1-\bar\lambda)\alpha_0, \bar\lambda\alpha_1) \xleftrightarrow{aq} (U,X) \xrightarrow{a} (U',X)$
基本仮定

よって $\bar\lambda \le \bar\lambda'$
仮に $\bar\lambda=\bar\lambda'$ とする
$(U,X) \xleftrightarrow{aq} ((1-\bar\lambda)\alpha_0, \bar\lambda\alpha_1)$
$=((1-\bar\lambda')\alpha_0, \bar\lambda'\alpha_1) \xleftrightarrow{aq} (U',X)$.
つまり $(U,X) \xleftrightarrow{aq} (U',X)$ むじゅん → $\bar\lambda \ne \bar\lambda'$
よって $\bar\lambda<\bar\lambda'$ である. → $S(U,X)<S(U',X)$
$\Leftarrow$ $S(U,X)<S(U',X) \Rightarrow \bar\lambda<\bar\lambda'$
$(U,X) \xleftrightarrow{aq} ((1-\bar\lambda)\alpha_0, \bar\lambda\alpha_1) \xrightarrow{a} ((1-\bar\lambda')\alpha_0, \bar\lambda'\alpha_1) \xleftrightarrow{aq} (U',X)$
$\alpha_0 \xrightarrow{a} \alpha_1$ と $\bar\lambda<\bar\lambda'$

よって $(U,X) \xrightarrow{a} (U',X)$ が可能. → $U \le U'$
$U=U'$ はあり得ない. $U<U'$.

レポート その2
$\alpha_0 \xrightarrow{a} \alpha_1 \overset{a}{\not\leftrightarrow} \alpha$ や $\alpha \overset{a}{\not\leftrightarrow} \alpha_0 \xrightarrow{a} \alpha_1$
の場合を考えよう.
関係を $\lambda \in R$ に拡張.
$\lambda<0$, $((1-\lambda)\alpha_0, \lambda\alpha_1) \xrightarrow{a} \alpha$
は $(1-\lambda)\alpha_0 \xrightarrow{a} (\alpha, \underset{\text{正}}{-\lambda}\alpha_1)$ のことと解釈
$\lambda>1$ も同様.
この場合に.
・$S(\alpha)$ が最初 $S(\alpha)=\bar\lambda S_0+(1-\bar\lambda)S_1$
$=\max\{ \cdots \}$
と書けることを示せ.
・$S(U,X)$ のUについての単調増加性を示せ.