

5) 情報量、についての注意
 確率分布 P に従うランダムな N 文字の文章
 \hookrightarrow 情報量 $NH(P)$ bits 文字の情報量

ランダムでなければ?

AABC AABC AABC AABC

↓
 はるかに圧縮可能 (情報量が少い)

完全にランダムな文章が最大の情報量をもち、

与えられた文章がどこまで圧縮可能かはむずかしい問題。

例: 92653589793238

$$H(P) = - \sum_{i=1}^m p_i \log_2 p_i$$

情報量が $H(P)$ であることの具体的な説明。

m 種類の文字 a_1, a_2, \dots, a_m が出現
 N 文字の文章 $N \gg 1$

N 文字の文章 $N \gg 1$

N 文字のうち、文字 a_1 は、 $N_1 = Np_1$ 回

2 $N_2 = Np_2$ 回

...

\dots $N_m = Np_m$ 回

とされる。

$(1, \dots, m)$ の文字がそれぞれ N_1, N_2, \dots, N_m 回
 ある文章の総数。

$$W = \frac{N!}{N_1! N_2! \dots N_m!}$$

Stirling の公式

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots 1 \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$n \gg 1$ とき

$$W \sim \left(\frac{N}{e}\right)^N \left(\frac{e}{N_1}\right)^{N_1} \left(\frac{e}{N_2}\right)^{N_2} \dots \left(\frac{e}{N_m}\right)^{N_m}$$

$$= \left(\frac{e}{N_1}\right)^{N_1} \left(\frac{e}{N_2}\right)^{N_2} \dots \left(\frac{e}{N_m}\right)^{N_m} \left(\sum_{i=1}^m N_i = N\right)$$

$$= p_1^{-Np_1} p_2^{-Np_2} \dots p_m^{-Np_m}$$

ビットで表すと

$$\log_2 W \sim \log_2 \left(p_1^{-Np_1} p_2^{-Np_2} \dots p_m^{-Np_m} \right)$$

$$= -N \{ p_1 \log_2 p_1 + \dots + p_m \log_2 p_m \}$$

$$= N \cdot H(P)$$