次に、$\vec{A}$ と ϕ とを決める方程式をみちびく。 (3.3) と (3.4) をつかう)

(3.3) より

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{i} \qquad (\because\ \varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2} \quad c: 光速)$$

公式

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{A}) = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{A} - \Delta\vec{A}$$

$$\because)\ (\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{A}))_i = \varepsilon_{iab}\frac{\partial}{\partial x_a}\varepsilon_{bcd}\frac{\partial A_d}{\partial x_c}$$

$$= \varepsilon_{bia}\varepsilon_{bcd}\frac{\partial^2 A_d}{\partial x_a \partial x_c}$$

$$= (\delta_{ic}\delta_{ad} - \delta_{id}\delta_{ac})\frac{\partial^2 A_d}{\partial x_a \partial x_c}$$

$$= \frac{\partial^2 A_a}{\partial x_i \partial x_a} - \frac{\partial^2 A_i}{\partial x_a \partial x_a}$$

$$= (\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{A} - \Delta\vec{A})$$

完全反対称テンソル

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (ijk) = (1,2,3),\ (2,3,1),\ (3,1,2) \\ -1 & (ijk) = (1,3,2),\ (3,2,1),\ (2,1,3) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$(\mathrm{rot}\,\vec{A})_i = \varepsilon_{iab}\frac{\partial A_b}{\partial x_a} \qquad \left(= \sum_{a=1}^{3}\sum_{b=1}^{3}\varepsilon_{iab}\frac{\partial A_b}{\partial x_a}\right)$$

(同じ添字については 1 から 3 まで和をとる)

この公式より

$$\mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \Delta\vec{A} = \mu_0\vec{i}$$

また、(3.4) より

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = -\mathrm{div}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \mathrm{grad}\,\phi\right)$$

$$= -\mathrm{div}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) - \Delta\phi$$

$$= \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore\ -\mathrm{div}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) - \Delta\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \cdots (3.9)$$

$\vec{A}$ と ϕ を求め、(3.7) に代入して

$\vec{E}$ と $\vec{B}$ を求めることができる。