$$\therefore -\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{B}\cdot\vec{H}) - \vec{H}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{E}$$

これを、(4.1)に代入すると、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{v}_i^{\,2}\right) = \int_V d^3x \left[-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{B}\cdot\vec{H}) - \vec{H}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{E} + \vec{E}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{H}\right]$$

ここで、

$$\mathrm{div}(\vec{E}\cdot\vec{H}) = \vec{H}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{E} - \vec{E}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{H} \qquad (\because (\vec{E}\times\vec{H})_i = \varepsilon_{iab}E_aH_b)$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left[\sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2}(t) + \frac{1}{2}\int_V d^3x(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{B}\cdot\vec{H})\right] = -\int_V \mathrm{div}(\vec{E}\times\vec{H})\,d^3x$$

ここで、

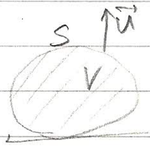
$$\left.\begin{aligned} W(t) &= \int_V d^3x\, w(\vec{x},t) \\ w(\vec{x},t) &= \frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{B}\cdot\vec{H}) \\ \vec{S} &= \vec{E}\times\vec{H} \end{aligned}\right\} \cdots (4.2)$$

とおくと、

$$-\frac{d}{dt}\Big(\sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2}(t) + \underbrace{W(t)}_{\text{電磁場のもつ全エネルギー}}\Big) = \oint_S \vec{S}\cdot\vec{n}\,ds \quad \cdots (4.3)$$

poynting ベクトル

→ 単位時間に単位面積をとおって体系外に出ていくエネルギー.



(w; 電磁場のエネルギー密度)

点電荷と電磁場からなる体系の全エネルギーの単位時間あたりの減少率

注) SがOでなくても、エネルギーの流れがあるとはいえない。

例: 真空中に静電磁場がある場合

(一般に $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$ は 0でない)

$$\frac{\partial\vec{H}(\vec{x})}{\partial t} = \frac{\partial\vec{E}(\vec{x})}{\partial t} = 0$$

また、真空中では $\vec{i}=0$ よって (3.1)と(3.3)から

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{x}) = \mathrm{rot}\,\vec{B}(\vec{x}) = 0$$

ここで、

$$\oint_S \vec{S}\cdot\vec{n}\,ds = \int_V \mathrm{div}(\vec{E}\times\vec{H})\,d^3x = \int_V d^3x\,\{\vec{H}\cdot\underbrace{\mathrm{rot}\,\vec{E}}_{0} - \vec{E}\cdot\underbrace{\mathrm{rot}\,\vec{H}}_{0}\}$$

であるから

$$\oint_S \vec{S}\cdot\vec{n}\,ds = 0$$