まとめ

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}_L}{\partial t} = -\mathrm{grad}\,\phi_L \quad \Big\} \cdots (3.15)$$
$$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}_L$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A}_L = -\mu_0 \vec{i} \quad \Big\} \cdots (3.16)$$
$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi_L = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

ローレンツ条件 : $\mathrm{div}\,\vec{A}_L + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi_L}{\partial t} = 0 \quad \cdots (3.17)$

ローレンツ条件をみたす電磁ポテンシャル $(\vec{A}_L, \phi)$ を Lorentz ゲージにおける電磁ポテンシャルという。

(3.16) → (3.17) → (3.15)

注) (3.12) の解は $\begin{cases} \chi = \chi_0 + ((3.12)\text{の特解}) \\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\chi_0 = 0 \end{cases} \cdots (3.18)$

(3.15), (3.16), (3.17) は次のゲージに変換して不変.

$$\begin{cases} \vec{A}_L' = \vec{A}_L + \mathrm{grad}\,\chi_0 \\ \phi_L' = \phi_L - \frac{\partial}{\partial t}\chi_0 \end{cases}$$
(∵ (3.12) は χ を $\chi + \chi_0$ としても満たされる.)

§4 エネルギー保存則

点電荷の運動方程式 (1.6) を書き換えると、

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i(t)}{dt^2} = \int_V d^3x \left\{ e_i \delta^3(\vec{x}-\vec{r}_i(t))\,\vec{E}(\vec{x},t) + e_i \delta^3(\vec{x}-\vec{r}_i(t))\,\vec{v}_i(t)\times\vec{B}(\vec{x},t) \right\}$$

$$\therefore \sum_i m_i \vec{v}_i(t)\frac{d\vec{v}_i(t)}{dt} = \sum_i \int_V d^3x \left\{ e_i \delta^3(\vec{x}-\vec{r}_i(t))\,\vec{v}_i(t)\cdot\vec{E}(\vec{x},t) + e_i \delta^3(\vec{x}-\vec{r}_i(t))\,\underbrace{\vec{v}_i(t)\left[\vec{v}_i(t)\times\vec{B}(\vec{x},t)\right]}_{=0} \right\}$$

$$\sum_i \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}m_i \vec{v}_i^2(t)}_{\text{仕事}}\Big) = \sum_i \int_V d^3x \left\{ \underbrace{e_i \delta^3(\vec{x}-\vec{r}_i(t))}_{(1.7)\text{の第2式を代入.}}\,\vec{v}_i(t)\,\vec{E}(x,t) \right\}$$

$$\therefore \sum_i \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m_i \vec{v}_i^2(t)\right) = \int_V d^3x \left(\mathrm{rot}\,\vec{H}(\vec{x},t) - \frac{\partial \vec{P}(\vec{x},t)}{\partial t}\right)\vec{E}(\vec{x},t)$$

$$= \int_V d^3x \left(\vec{E}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot\vec{E}\right) \quad \cdots (4.1)$$

ここで、

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H}\right) = \vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\because \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E},\ \vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B})$$
$$= \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{H}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{E} \quad (\because (1.7)\text{の第一式})$$