ここで、ゲージ変換を考える

$$\left.\begin{aligned} \vec{A}' &= \vec{A} + \mathrm{grad}\, u \\ \phi' &= \phi - \frac{\partial}{\partial t} u \end{aligned}\right\} \quad (3.10)$$

u：微分可能な任意関数

(3.7)と(3.9)はゲージ変換に対して不変である。

$$\because\ \mathrm{rot}\, \vec{A}' = \mathrm{rot}\, \vec{A} + \underbrace{\mathrm{rot}\, \mathrm{grad}\, u}_{0} = \mathrm{rot}\, \vec{A} = \vec{B}$$

$$\cdot\ -\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} - \mathrm{grad}\, \phi' = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \mathrm{grad} \frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{grad}\, \phi + \mathrm{grad} \frac{\partial u}{\partial t}$$
$$= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\, \phi$$
$$= \vec{E}$$

$$\cdot\ \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\, \vec{A}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi'}{\partial t}\right) + \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{A}'$$
$$= \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\, \vec{A} + \Delta u + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)(\vec{A} + \mathrm{grad}\, u)$$
$$= \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\, \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{A}$$
$$= \mu_0 \vec{i}$$

$$\cdot\ -\mathrm{div}\left(\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}\right) - \Delta \phi' = -\mathrm{div}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \mathrm{grad} \frac{\partial u}{\partial t}\right) - \Delta \phi + \Delta \frac{\partial u}{\partial t}$$
$$= -\mathrm{div}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) - \Delta \phi$$
$$= \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

そこで、(3.9)のある解を $\vec{A_0}$, ϕ_0 とする。そして

$$\Delta \chi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -\left(\mathrm{div}\, \vec{A_0} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi_0}{\partial t}\right) \quad \cdots (3.12)$$

をみたす解 χ を u とする。そして $\vec{A}'$, ϕ' を $\vec{A}_L$, ϕ_L として

$$\left.\begin{aligned} \vec{A}_L &= A_0 + \mathrm{grad}\, \chi \\ \phi_L &= \phi_0 + \frac{\partial}{\partial t} \chi \end{aligned}\right\} \cdots (3.13)$$

このとき

$$\mathrm{div}\, \vec{A}_L + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi_L}{\partial t} = \mathrm{div}\, \vec{A_0} + \Delta \chi + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi_0}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}$$
$$= 0 \quad (\because (3.12)) \quad \cdots (3.14)$$

よって(3.9)は

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{A}_L = \mu_0 \vec{i} \\ \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\phi_L = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \end{cases}$$

これは(3.9)とちがった。